Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées 1, 2, ... , n, ...
Il ne peut tenter de passer la hauteur $n + 1$ que s'il a réussi les sauts aux hauteurs 1, 2, ... , n.
En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au n-ième saut est : $p_n = \dfrac{1}{n}$. Ainsi, le premier saut est toujours réussi.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'évènement : « le sauteur a réussi son k-ième saut » et on note X la variable aléatoire réelle égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.
2. Rappeler sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction exponentielle.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
4. Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.
5. Justifier que $[X = 2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $\mathbb{P}([X = 2])$.
6. Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer l'évènement $[X = n]$ en fonction d'évènements du type S_k.
7. Déterminer la loi de X.
8. Vérifier **par le calcul** que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = 1$.
9. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

EXERCICE 2

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. **Étude de la convergence de la série de terme général u_n**

   1.1. Vérifier que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.

   1.2. Montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0.

   1.3. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge.

2. **Calcul de la somme de cette série**

   2.1. Soit t un réel. Linéariser $\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

   2.2. En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos(t)}\mathrm{d}t$.

   2.3. Intégration terme à terme ?

   2.3.1. Déterminer une relation de récurrence entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$.

2.3.2. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

2.3.3. Peut-on utiliser un théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions pour calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$? *On justifiera rigoureusement la réponse.*

2.4. On pose, pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$ et $V_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k(t)$.

En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

EXERCICE 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
On note $E_n = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ sa base canonique.

On considère les endomorphismes f et g de E_n définis par :

$$\left(f(e_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i \text{ et } \forall\, j \in [\![2, n]\!], f(e_j) = e_1 + e_j\right) \quad \text{et} \quad \left(g = f - \mathrm{id}_{E_n}\right).$$

1. Donner, dans la base $\mathscr{B}$, F et G les matrices respectives des endomorphismes f et g.
2. Justifier que f et g sont diagonalisables.
3. **Diagonalisation de f et de g dans une même base**

3.1. Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Im}(g)$, le rang de g et une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(g)$.

3.2. Montrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E_n.

3.3. Démontrer que le spectre de l'endomorphisme g est : $\mathbf{Sp}(g) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ où les deux réels λ_1 et λ_2 sont non nuls et vérifient la relation $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. On choisira $\lambda_1 > 0$.

3.4. On se propose de déterminer λ_1 et λ_2 par deux méthodes :

3.4.1. Méthode 1

(i) Démontrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont stables par g.

(ii) Déterminer la matrice H dans la base $\mathscr{B}_1$ de l'endomorphisme h de $\mathrm{Im}(g)$ induit par g.

(iii) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres associés de h.

(iv) En déduire, en le justifiant soigneusement, les valeurs de λ_1 et λ_2.

3.4.2. Méthode 2

(i) Montrer que le spectre de $g^2 = g \circ g$ est : $\mathbf{Sp}\left(g^2\right) = \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}$.

(ii) Déterminer la matrice de l'endomorphisme g^2 dans la base $\mathscr{B}$.

(iii) En déduire, en fonction de n, la valeur de $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$.

(iv) Retrouver alors les valeurs de λ_1 et λ_2 obtenues par la méthode 1.

3.5. Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sous la forme $P = \begin{pmatrix} * & \dots & * & * \\ 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & & \\ 1 & * & \dots & * \end{pmatrix}$

telle que $P^{-1}\, G\, P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, .., 0)$. *On ne demande pas de déterminer* P^{-1}.

3.6. Justifier que la matrice $P^{-1}\, F\, P$ est diagonale.

4. Résoudre, pour t réel, le système différentiel : $X'(t) = F\, X(t) + t\, U$ où U est la première colonne de la matrice P.

EXERCICE 4

On pose pour tout réel x, lorsque cela est possible, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t$.

1. Continuité de f

1.1. Montrer que l'on peut prolonger par continuité sur $\mathbb{R}_+$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2.$$

1.2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$ est convergente.

1.3. En déduire que la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.4. En déduire que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Régularité de f

2.1. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $0 < a < b$. On considère $x \in [a, b]$.

2.1.1. Montrer que : $\forall t \geqslant 0,\ 0 \leqslant |\sin(t)| \leqslant t$.

2.1.2. Montrer que : $\forall\, t > 0,\ 0 \leqslant \dfrac{\sin^2(t)}{t}\, \mathrm{e}^{-xt} \leqslant t\, \mathrm{e}^{-at}$.

2.1.3. Montrer que : $\forall\, t > 0,\ 0 \leqslant \sin^2(t)\, \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-at}$.

2.2. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner pour tout réel x strictement positif, une expression de $f''(x)$ sous forme intégrale.

3. Une autre expression de f''

On note i un nombre complexe vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.

3.1. Montrer que : $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \forall\, x > 0,\ \left|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\theta - x)t}\right| = \mathrm{e}^{-xt}$.

3.2. En déduire que : $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ \lim\limits_{t \to +\infty} \left| \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\,\theta - x)\,t} \right| = 0$.

3.3. Démontrer alors que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{x}{2(x^2+4)}$.

On pourra utiliser la formule d'Euler : $\sin(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{2\,\mathrm{i}}$.

4. Une autre expression de f

4.1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

4.2. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

4.3. Calculer la dérivée de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(t) = t \ln\left(t^2 + 4\right) - 2t + 4 \arctan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

4.4. Déterminer alors, pour tout réel x strictement positif, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

5. Calculer alors la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

Corrigé

Correction PC 2022

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Correction de l'exercice 1

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées 1, 2, ... , n, ...
Il ne peut tenter de passer la hauteur $n + 1$ que s'il a réussi les sauts aux hauteurs 1, 2, ... , n.
En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au n-ième saut est : $p_n = \dfrac{1}{n}$. Ainsi, le premier saut est toujours réussi.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'évènement : « le sauteur a réussi son k-ième saut » et on note X la variable aléatoire réelle égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Formule des probabilités composées :
   Pour toute famille $(B_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ d'évènements tels que $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{n-1}) \neq 0$, alors :
   $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times ... \times \mathbb{P}_{B_1\cap B_2\cap...\cap B_{n-1}}(B_n)$.
2. Pour tout réel t, on a : $\mathrm{e}^t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n\,!}$.
3. X prend toutes les valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
4. $[X = 1] = S_1 \cap \overline{S_2}$, donc $\mathbb{P}([X = 1]) = \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}_{S_1}(\overline{S_2})$ par la formule des probabilités composées.
   D'où $\boxed{\mathbb{P}([X = 1]) = \dfrac{1}{2}}$.
5. La variable aléatoire prend la valeur 2 si et seulement si le sauteur a réussi les sauts 1 et 2 mais a raté le saut 3. Donc $[X = 2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$.
   Par la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}([X = 2]) = \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}_{S_1}(S_2)\mathbb{P}_{S_1\cap S_2}(\overline{S_3}) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)$,
   donc $\boxed{\mathbb{P}([X = 2]) = \dfrac{1}{3}}$.
6. Soit $n \geqslant 2$.
   L'évènement $[X = n]$ signifie que le sauteur a réussi tous les sauts jusqu'au saut numéro n puis raté le saut numéro $n + 1$.
   On en déduit que $[X = n] = \left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} S_k\right) \cap \overline{S_{n+1}}$.
7. On utilise la formule des probabilités composées pour calculer la probabilité de cet évènement :
   $P(X = n) = P(S_1)\, P_{S_1}(S_2)\, P_{S_1\cap S_2}(S_3) \ldots P_{S_1\cap\ldots\cap S_n}(\overline{S_{n+1}})$
   On en déduit que $P(X = n) = p_1\, p_2 \ldots p_n\, (1 - p_{n+1}) = \dfrac{1}{n\,!}\left(1 - \dfrac{1}{n + 1}\right)$.
   On remarque que cette formule est encore valable pour $n = 1$.
8. Vérifions qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité d'une v.a.r. :
   $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,!}\left(1 - \frac{1}{k + 1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k + 1)\,!} = 1 - \frac{1}{(n + 1)\,!}$
   Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $t_n = n\,P(X = n) = \dfrac{1}{(n-1)\,!}\,\dfrac{n}{n+1}$.

Alors : $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{(n+1)^2}{n^2(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la règle de D'Alembert assure la convergence de la série de terme générique $n\,P(X = n)$: X possède une espérance.

Pour en calculer sa valeur, on part de sa somme partielle : $E_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)\,!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)\,!}$ puis on utilise :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)\,!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)\,!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\,!}$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n\,!} = \mathrm{e}$

Finalement, $\boxed{E(X) = e - 1}$.

Correction de l'exercice 2

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Étude de la convergence de la série de terme général u_n

1.1. On a : $\forall\, t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos(t) \in [0, 1]$ et donc, $|u_n| = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Ensuite, pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos^{n+1}(t) - \cos^n(t) = \cos^n(t)(\cos(t) - 1) \leqslant 0$ et par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t)\mathrm{d}t$.

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \geqslant |u_{n+1}|$: $\boxed{\text{la suite } (|u_n|) \text{ est décroissante}}$.

1.2. On va appliquer le théorème de convergence dominée :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto \cos^n(t)$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$;
- pour tout $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \cos(t) < 1$, donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction continue par morceaux f définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(t) = 0$ si $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $f(0) = 1$;
- pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos^n(t) \leqslant 1$, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dominée sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par la fonction constante égale à 1 qui est intégrable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

D'après le théorème de convergence dominée, $\boxed{|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t = 0}$.

1.3. D'après les questions **1.1.** et **1.2.** la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc elle converge.

2. Calcul de la somme de cette série

2.1. C'est presque du cours : la formule de duplication donne pour tout réel a, $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$, donc $\cos^2(a) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$. On en déduit que pour tout t réel, $\boxed{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\,(1 + \cos(t))}$.

2.2. On effectue le changement de variable affine : $u = \frac{t}{2}$ qui donne : $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u$

et donc, $\boxed{I = \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2(u)} = [\tan(u)]_0^{\pi/4} = 1}$.

2.3. Intégration terme à terme ?

2.3.1. On reconnaît en $|u_n| = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ une intégrale de Wallis.

Ainsi, pour trouver une relation entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$, il suffit d'effectuer une intégration par parties en écrivant que $|u_{n+2}| = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t)\,\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

On pose alors : $u = \cos^{n+1}(t)$ et $\mathrm{d}v = \cos(t)\,\mathrm{d}t$

D'où, $\mathrm{d}u = -(n+1)\,\cos^n(t)\,\sin(t)\,\mathrm{d}t$ et on peut choisir $v = \sin(t)$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui justifie l'intégration par parties.

$$\begin{aligned}
\text{Alors : } |u_{n+2}| &= [\cos^n(t)\,\sin(t)]_0^{\pi/2} + (n+2)\int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t)\,\sin^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\left(1 - \cos^2(t)\right)\mathrm{d}t \\
&= (n+1)\,(|u_n| - |u_{n+2}|)
\end{aligned}$$

Et finalement, $\boxed{|u_{n+2}| = \frac{n+1}{n+2}\,|u_n|}$.

2.3.2. On a $|u_0| = \frac{\pi}{2} \geqslant 1$ et $|u_1| = 1 \geqslant \frac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $|u_n| \geqslant \frac{1}{n+1}$.

Alors, la relation obtenue à la question précédente permet d'affirmer que $|u_{n+2}| \geqslant \frac{1}{n+2}$.

Il en résulte par récurrence double que l'on a : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| \geqslant \frac{1}{n+1}}$.

2.3.3. Il y a deux théorèmes d'intégration terme à terme dans le programme :

- le premier concerne une suite de fonctions (f_n) continues sur un segment et dont la série converge uniformément sur le segment. Pour nous, $f_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$ sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Ce sont bien des fonctions continues, mais la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas en 0.
- le second concerne une suite de fonctions (f_n) continues par morceaux sur un intervalle et dont la série converge simplement. On a de nouveau $f_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Ce sont des fonctions continues et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Toutefois, il faut aussi l'hypothèse $\sum \displaystyle\int_0^{\pi/2} |f_n|$ converge. Or ce n'est pas le cas car $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |f_n| = |u_n| \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

On ne peut donc appliquer aucun des deux théorèmes d'intégration terme à terme du programme.

2.4. On pose, pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$ et $V_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k(t)$.

On a :

- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ V_n(t) = \dfrac{1 - (-1)^{n+1} \cos^{n+1}(t)}{1 + \cos(t)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(t) = \dfrac{1}{1 + \cos(t)}$ et donc, la suite de fonctions $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ vers f.
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ |V_n(t)| \leqslant \dfrac{2}{1 + \cos(t)} = g(t)$ qui est une fonction intégrable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Il est aussi possible de majorer par 2.

Le Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions s'applique et on peut intervertir passage à la limite et intégration.

Il en résulte que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cos^n(t)\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos(t)}\,\mathrm{d}t$$

Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1}$.

Correction de l'exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

On note $E_n = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ sa base canonique.

On considère les endomorphismes f et g de E_n définis par :

$$\left(f(e_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i \text{ et } \forall\, j \in [\![2, n]\!], f(e_j) = e_1 + e_j\right) \quad \text{et} \quad \left(g = f - \mathrm{id}_{E_n}\right).$$

1. La matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$ est : $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice G de g dans la base $\mathscr{B}$ est : $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Comme F et G sont symétriques réelles, les endomorphismes f et g de E_n sont diagonalisables.

3. Diagonalisation de f et de g dans une même base

3.1. On a $g(e_1) = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} e_i$ et $\forall j \in [\![2, n]\!], g(e_j) = e_1$.

Donc $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\Big((g(e_j))_{1\leqslant j\leqslant n}\Big) = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1)$ où $\boxed{\mathscr{B}_1 = \Big(e_1, \displaystyle\sum_{i=2}^{n} e_i\Big)}$ est libre.

Donc $\mathscr{B}_1$ est une base de $\mathrm{Im}(g)$ et par suite $\mathrm{rg}(g) = \dim(\mathrm{Im}(g)) = 2$.

Comme $\forall j \in [\![3, n]\!], g(e_j - e_2) = 0$, $\boxed{\mathscr{B}_2 = (e_j - e_2)_{3\leqslant j\leqslant n}}$ est une famille de vecteurs de $\mathrm{Ker}(g)$. Comme elle est libre, de cardinal $n-2$ et comme, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = \dim(E_n) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = n-2$, on peut dire que $\mathscr{B}_2$ est une base de $\mathrm{Ker}(g)$.

3.2. On remarque que : $\forall j \in [\![3, n]\!], (e_j - e_2|e_1) = 0$ et $\Big(e_j - e_2\Big| \displaystyle\sum_{i=2}^{n} e_i\Big) = 0$.

Chaque vecteur de la base de $\mathrm{Ker}(g)$ est donc orthogonal à tout vecteur de la base de $\mathrm{Im}(g)$, donc $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont orthogonaux donc en somme directe. On déduit en utilisant le théorème du rang que $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E_n.

3.3. Comme g est diagonalisable et $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = n-2$, on sait que 0 est valeur propre de g de multiplicité $n-2$.

Donc $\mathrm{Tr}(g) = 0 \times (n-2) + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ avec λ_1 et λ_2 non nulles. Ainsi, $\boxed{\mathbf{Sp}(g) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}}$ avec λ_1 et λ_2 non nuls et vérifiant $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

3.4. On se propose de déterminer λ_1 et λ_2 par deux méthodes :

3.4.1. Méthode 1

(i) $\mathrm{Im}(g) = g(E_n) \subset E_n$ donc $g(\mathrm{Im}(g)) \subset g(E_n) = \mathrm{Im}(g)$, i.e. $\mathrm{Im}(g)$ est stable par g.
Si $x \in \mathrm{Ker}(g)$, alors $g(x) = 0_{E_n} \in \mathrm{Ker}(g)$ car $g(0_{E_n}) = 0_{E_n}$. Donc $\mathrm{Ker}(g)$ est stable par g.

(ii) Comme $\mathrm{Im}(g)$ est stable par g, on peut parler de $g_{|\mathrm{Im}(g)}$:$\mathrm{Im}(g) \to \mathrm{Im}(g), x \mapsto g(x)$.

Sa matrice dans la base $\mathscr{B}_1$ est notée H. Notons $e'_1 = e_1$ et $e'_2 = \sum_{j=2}^{n} e_j$.

Comme $g(e'_1) = g(e_1) = e'_2$ et $g(e'_2) = \sum_{j=2}^{n} g(e_j) = (n-1)e_1$, il s'ensuit que : $H = \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(iii) $\chi_H(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(H)X + \det(H) = X^2 - (n-1)$, donc les valeurs propres de h sont $\pm\sqrt{n-1}$. Le sous-espace propre associé à $\sqrt{n-1}$ est $\mathrm{Vect}(\sqrt{n-1}e'_1 + e'_2)$ et celui associé à $-\sqrt{n-1}$ est $\mathrm{Vect}(-\sqrt{n-1}e'_1 + e'_2)$.

(iv) En concaténant les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, on déduit de **3.4.** une base $\mathscr{B}'$ de E_n dans laquelle la matrice de g s'écrit par blocs $\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\chi_g(X) = X^{n-2}(X-\lambda_1)(X-\lambda_2) = X^{n-2}\chi_H(X)$.

D'où $\lambda_1 = \sqrt{n-1}$ et $\lambda_2 = -\sqrt{n-1}$.

3.4.2. Méthode 2

(i) $\forall x \in E_n, g(x) = \lambda x \Rightarrow g^2(x) = \lambda^2 x$. Les valeurs propres de g étant 0, λ_1 et λ_2, celles de g^2 sont 0, λ_1^2 et λ_2^2. Donc $\boxed{\mathbf{Sp}\left(g^2\right) = \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}}$.

(ii) $g^2(e_1) = \sum_{j=2}^{n} g(e_j) = (n-1)e_1$ et $\forall j \in [\![2, n]\!], g^2(e_j) = g(e_1) = \sum_{j=2}^{n} e_j$.

$$\text{D'où } G^2 = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(g^2) = \begin{pmatrix} n-1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) $\boxed{\mathrm{Tr}(g^2) = 0 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2(n-1)}$.

(iv) Comme $\mathrm{Tr}(g) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$, il s'ensuit que $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = (n-1)$. Comme $\lambda_1 > 0$, on retrouve $\boxed{\lambda_1 = \sqrt{n-1} \text{ et } \lambda_2 = -\lambda_1}$. On retrouve les résultats de **3.4.1.**.

3.5. G étant diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $G = PDP^{-1}$ où la matrice D est telle $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, \ldots, 0)$ et P une matrice dont les vecteurs colonnes sont des vecteurs propres de G.

Soit $X^\top = (x_1 \cdots x_n)$. Alors $GX = \lambda X \iff \begin{cases} x_2 + \cdots + x_n = \lambda x_1 \\ \forall j \in [\![2, n]\!], x_1 = \lambda x_j \end{cases}$ (1).

- Si $\lambda \neq 0$ et $x_1 \neq 0$, (1) $\iff \begin{cases} \forall j \in [\![2,n]\!], x_j = \dfrac{x_1}{\lambda} \\ \lambda^2 = (n-1) \end{cases}$ puisqu'un vecteur propre ne peut être nul.
  Pour $\lambda_1 = \sqrt{n-1}$ on peut prendre $x_1 = \sqrt{n-1}$ et $\forall j \in [\![2,n]\!]$, $x_j = 1$.
  Pour $\lambda_2 = -\sqrt{n-1}$ on peut prendre $x_1 = -\sqrt{n-1}$ et $\forall j \in [\![2,n]\!]$, $x_j = 1$.
- Si $\lambda = 0$, on a déjà vu que $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(G) = \mathrm{Vect}\Big((e_j - e_2)_{3\leqslant j\leqslant n}\Big)$.

D'où une matrice $P = \begin{pmatrix} \sqrt{n-1} & -\sqrt{n-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.6. $F = G + I_n = PDP^{-1} + PP^{-1} = P(D + I_n)P^{-1}$.
Donc $P^{-1}FP = D + I_n = \mathrm{diag}(1+\lambda_1, 1+\lambda_2, 1, \ldots, 1)$ est une matrice diagonale.

4. Pour résoudre le système différentiel $X' = FX + tPe_1$, utilisons la méthode du cours en posant $X = PY$. On est ramené à la résolution de $Y' = (P^{-1}FP)Y + te_1$ (2).

(2) $\iff \begin{cases} y_1' = (1+\sqrt{n-1})y_1 + t \\ y_2' = (1-\sqrt{n-1})y_2 \\ \forall j \in [\![3,n]\!], y_j' = y_j \end{cases}$

Il s'ensuit que :

$\forall j \in [\![3,n]\!]$, $\exists \alpha_j \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_j = \alpha_j e^t$.

$\exists \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_2 = \alpha_2 e^{(1-\sqrt{n-1})t}$.

Pour déterminer y_1, on doit résoudre $y' = ay + t$ (3).

(3) $\iff \dfrac{d}{dt}(ye^{-at}) = te^{-at}$.

Il suffit de chercher une primitive de $t \mapsto te^{-at}$ sous la forme $t \mapsto (\alpha t + \beta)e^{-at}$.

On peut résoudre l'équation homogène puis chercher une solution particulière de la forme $t \mapsto \alpha t + \beta$.

Donc $\exists \alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_1 = \alpha_1 e^{(1+\sqrt{n-1})t} - \dfrac{t}{1+\sqrt{n-1}} + \dfrac{1}{(1+\sqrt{n-1})^2}$

On termine la résolution en écrivant $X = PY$.

EXERCICE 4

On pose pour tout réel x, lorsque cela est possible, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

1. Continuité de f

1.1. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues. Comme $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$, la fonction $g : t \mapsto \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$.

1.2. La fonction g est continue sur $[1, +\infty[$. De plus, pour tout $t \geq 1$, $|g(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Ainsi, par comparaison, la fonction g est intégrable sur $[1, +\infty[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$ est convergente.

1.3. La fonction $t \mapsto \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $]0, 1]$ car elle est continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0. Elle est aussi intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.4. Posons, pour $x \geqslant 0$ et $t \in \,]0, +\infty[$, $h(x,t) = \left(\dfrac{\sin\, t}{t}\right)^2 e^{-xt}$.

- Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $t > 0$, $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t > 0$ et tout $x \geqslant 0$, on a :
  $0 \leqslant e^{-xt} \leqslant 1$, donc $|h(x,t)| \leqslant g(t)$, la fonction g étant intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de continuité sous l'intégrale, la fonction $\boxed{f \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}_+}$.

2. Régularité de f

2.1. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $0 < a < b$. On considère $x \in [a, b]$.

2.1.1. La dérivée de $t \mapsto \sin(t)$ est $t \mapsto \cos(t)$ qui est bornée sur $\mathbb{R}$ en valeur absolue par 1. D'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction sin est donc 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, $|\sin(t) - \sin(0)| \leqslant |t - 0|$, ce qui donne bien : $\boxed{\forall t \geqslant 0,\ 0 \leqslant |\sin(t)| \leqslant t}$.

2.1.2. Soit $t > 0$. D'après la question précédente, $\sin^2(t) \leqslant t^2$. De plus, $a \leqslant x$ donc $-xt \leqslant -at$ et $0 \leqslant \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-at}$ par croissance de l'exponentielle.

Ainsi, $\sin^2(t)\,\mathrm{e}^{-xt} \leqslant t^2\,\mathrm{e}^{-at}$, puis $\boxed{\forall\, t > 0,\ 0 \leqslant \dfrac{\sin^2(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-xt} \leqslant t\,\mathrm{e}^{-at}}$.

2.1.3. Soit $t > 0$. De même que précédemment, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-at}$. De plus, $0 \leqslant \sin^2(t) \leqslant 1$. Donc :

$\boxed{\forall\, t > 0,\ 0 \leqslant \sin^2(t)\,\mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-at}}$.

2.2. Soit a et b deux réels strictement positifs avec $0 < a < b$.

- Pour tout $x \in [a, b]$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^2 sur $[a, b]$.

- Pour tout $x \in [a,b]$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{\sin^2(t)}{t} e^{-xt}$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = \sin^2 t\, e^{-xt}$ sont continues sur $]0,+\infty[$.
- Pour tout $x \in [a,b]$ et tout $t \in]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t\,\mathrm{e}^{-at}$, or $t \mapsto t\,\mathrm{e}^{-at}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et intégrable sur $[0,+\infty[$ car $t\mathrm{e}^{-at} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées.
- Pour tout $x \in [a,b]$ et tout $t \in]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-at}$, or $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et intégrable sur $[0,+\infty[$ car $a > 0$.

D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale,

$$\boxed{f \text{ est } C^2 \text{ sur } [a,b] \text{ et } \forall\, x \in [a,b],\ f''(x) = \int_0^{+\infty} \sin^2(t)\ \mathrm{e}^{-xt}\ dt}$$

Comme le résultat est valable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, il est aussi valable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Une autre expression de f''

On note i un nombre complexe vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.

3.1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $x > 0$. Alors $\left|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\theta - x)t}\right| = \left|\mathrm{e}^{i\theta t}\,\mathrm{e}^{-xt}\right| = \left|\mathrm{e}^{i\theta t}\right|\left|\mathrm{e}^{-xt}\right| = \left|\mathrm{e}^{-xt}\right|$. Ainsi, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $\forall\, x > 0$, $\left|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\theta - x)t}\right| = \mathrm{e}^{-xt}$.

3.2. Pour tout réel t. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $x > 0$. Comme $x > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-xt} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \left|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\theta - x)t}\right| = 0$ d'après la question précédente.

3.3. Soit $x > 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin^2(t) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\,\mathrm{i}}\right)^2 = -\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + \dfrac{1}{2}$.

Prenons $A > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^A \sin^2(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{4}\int_0^A \mathrm{e}^{(2\mathrm{i}-x)t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{4}\int_0^A \mathrm{e}^{(-2\mathrm{i}-x)t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^A \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}-x}(\mathrm{e}^{(2\mathrm{i}-x)A} - 1) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-2\mathrm{i}-x}(\mathrm{e}^{(-2\mathrm{i}-x)A} - 1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-x}(\mathrm{e}^{-Ax} - 1)\end{aligned}$$

Lorsque A tend vers $+\infty$, on a d'après les questions précédentes :

$$f''(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}-x} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}+x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{-4-x^2} + \frac{1}{2x} = -\frac{x}{2(x^2+4)} + \frac{1}{2x}$$

4. Une autre expression de f

4.1. On a pour tout $t > 0$ et tout $x > 0$, $|h(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-xt}$ d'après la question **2.1.1.**, donc :

$$|f(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

Par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

4.2. D'après **2.1.2.**, pour tout $x > 0$, $|f'(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. On prend $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\dfrac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-xt}$ de sorte que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$. On peut faire une intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}$$

Par encadrement on obtient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

4.3. La fonction G est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G'(t) &= \ln\left(t^2+4\right) + \frac{2t^2}{t^2+4} - 2 + \frac{2}{1+(t/2)^2} \\ &= \ln\left(t^2+4\right) \end{aligned}$$

4.4. On primitive l'expression trouvée à la question **3.3.** : il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) + C$$

Puis, $f'(x) = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+4}\right) + C$. En prenant la limite lorsque x tend vers $+\infty$, on trouve $C = 0$ avec la question **4.4.2.**.
D'autre part, d'après la question **4.3.**, il existe $D \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{2}(x\ln(x) - x) - \frac{1}{4}G(x) + D = \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x\ln(x^2+4) - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + D$$

Enfin, en utilisant la question **4.4.1.**, on trouve $D = \dfrac{\pi}{2}$.

D'où, $\boxed{\forall x > 0, \quad f(x) = \dfrac{1}{2}x\ln(x) - \dfrac{1}{4}x\ln(x^2+4) - \arctan\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{\pi}{2}}$.

5. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2\mathrm{d}t = f(0) = \lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ par croissances comparées.

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

Malheureusement, et même si nous avons constaté globalement un progrès dans les copies, il me faut reprendre les remarques générales faites l'an dernier sur les copies :
- Les correcteurs ont signalé à plusieurs reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**.
Notons que nous avons rencontré cette année des copies quasiment illisibles et donc lourdement pénalisées.
Rappelons que l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.
- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », etc... : rappelons que toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.
- Il ne suffit pas d'écrire « je peux utiliser le théorème car ses hypothèses sont vérifiées »... , il faut les vérifier !
- Les liens entre les différentes relations équations ou inéquations sont rarement indiqués ou alors très improprement. Le symbole $\iff$ n'est pas souvent utilisé à bon escient.
- Enfin, un exemple ne permet pas de démontrer un résultat général.

Les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire PC.
Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrisent pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de PC et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.
Nous constatons aussi une grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés.
Un nombre inquiétant d'étudiants a du mal à développer $(a+b)^2$ ou $(a-b)^2$.
Enfin, notons une nouvelle fois que les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé.

Conclusion : Nous demandons dans la rédaction des exercices constituant du sujet de la rigueur et une justification des résultats proposés en utilisant le cours : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.

Nous rappelons qu'il vaut mieux admettre le résultat d'une question clairement et continuer à traiter le reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.

Nous proposons chaque année dans ce rapport une correction détaillée du sujet et invitons vive-

ment les candidats à l'étudier attentivement.

• Commentaires exercice par exercice

Dans cette partie du rapport, nous avons voulu insister sur les points les plus négatifs rencontrés lors de la correction des copies, ceci afin d'aider les étudiants à ne pas faire ce genre d'erreurs, parfois grossières et souvent faciles à éviter.

Exercice 1

- Les étudiants confondent probabilités composées , définition de la probabilité conditionnelle et probabilités totales.
- Il y a parfois confusion entre évènement et probabilité de cet évènement : $\mathbb{P}(X = 1) = p_1 \times \overline{p_2}$ ou intersection de probabilités, ...
- Rappelons que l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X se note $X(\Omega)$ et non $\Omega(X)$.
- Le fait qu'un évènement soit un ensemble semble inconnu par un grand nombre de candidats.
- Nombres de candidats ne sont pas choqués de trouver $\mathbb{P}(X = 1) = 1$ et se livrent à d'invraisemblables pirouettes pour ne pas remettre en question ce résultat : par exemple, « $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} = 1^n$ » !
- L'hypothèse $\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \neq 0$ n'apparaît que très rarement.
- Il est étonnant de constater que certains étudiants sont incapables d'écrire le développement en série entière autour de 0 de la fonction exponentielle ou de donner un domaine de convergence juste. On a parfois trouvé des développements limités où $e^x = \lim\limits_{x\to 0} \sum \dfrac{1}{x}$.

Exercice 2

Notons quelques erreurs parmi les plus courantes :
1.
- Une suite décroissante et minorée par 0 ne converge pas forcément vers 0.
- Pour pouvoir appliquer le Critère spécial des séries alternées, encore faut-il avoir démontré qu'il s'agit d'une série alternée.
Il n'y a pas d'hypothèse de convergence absolue dans ce critère.
- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
- La décroissance de la fonction cos (où ?) ne justifie pas la décroissante de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Le fait que $|u_0| \geqslant |u_1|$ ne permet pas non plus de conclure à la décroissance de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Rappelons que la formule : $\displaystyle\int \cos^n(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}(x)$ est fausse.
- Enfin pour ceux qui ont tenté d'utiliser la règle de d'Alembert, le quotient d'intégrales n'est pas égal à l'intégrale du quotient.
2.
- Formules d'Euler mal connues : $\cos(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ etc...

- Plusieurs candidats concluent à la question **2.2.** à une erreur d'énoncé puisque l'on n'a pas défini I.
- On rencontre encore dans un raisonnement par récurrence comme hypothèse de récurrence : « supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ».
- Beaucoup trop de candidats déclarent que les séries $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geqslant 1} 1^n$ sont convergentes. On a même vu que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1$!

Exercice 3

Globalement, l'exercice n'est pas bien traité et cela nous interroge sur les connaissances des étudiants en algèbre linéaire.
Quelques erreurs, les plus courantes.
- Apparition de vecteurs dans les matrices F et G.
- La notion de « stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme » se confond avec celle de « stabilité d'un sous-espace vectoriel par combinaisons linéaires ».
- Des étudiants tentent de prouver que deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux en effectuant le produit scalaire de ces sous-espaces.
- Certains candidats pensent que la matrice I_n est la matrice dont tous les éléments sont égaux à 1.
- Le lien entre la trace et les valeurs propres distinctes d'une matrice diagonalisable ne fait pas intervenir l'ordre de multiplicité des valeurs propres sur beaucoup de copies.
- Pour montrer que le rang de la matrice G vaut 2, l'argument $C_2 = C_3 = \ldots = C_n$ et $C_1 \neq C_2$ ne suffit pas.
- Un nombre inquiétant de candidats ne sait pas effectuer correctement un produit matriciel.

Exercice 4

Ici encore, notons les erreurs les plus fréquemment rencontrées :
- Beaucoup d'étudiants tentent de dériver la fonction $t \mapsto |\sin(t)| - t$.
- La dérivation d'une fonction composée n'est pas maîtrisée chez trop de candidats.
- Les étudiants manipulent les équivalents comme des développements limités.
- On a rencontré une grande confusion entre les termes « intégrable » et « possède une primitive ».
- Noter que l'existence des Théorèmes d'interversion est globalement connue. Leur restitution est souvent maladroite, ceci dû à de gros problèmes de rédaction.
- Rappelons que l'assertion : « f intégrable »n'a aucun sens si l'on ne précise pas sur quel intervalle cette propriété est vraie.
- Trop d'étudiants ont trouvé que la dérivée de la fonction f était $\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt}$ en se contentant de supprimer le symbole $\int$ de la définition de la fonction f.
- Enfin, prolonger une fonction en un point ne rend pas forcément cette fonction continue en ce point.

FIN