Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

1. Pour tout réel x, on pose, lorsque cela est possible, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1.1. Déterminer l'ensemble de définition Δ de Γ.

1.2. Démontrer que pour tout réel x de Δ, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

1.3. On admet que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Calculer $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$ pour tout entier naturel n. On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n} \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t$.

2.1. Justifier l'existence de I_n.

2.2. En utilisant la question **1.** calculer I_n.

3. Pour tout réel x, on pose, lorsque cela est possible, $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt) \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t$.

3.1. Donner le développement en série entière de la fonction cos au voisinage de 0 et préciser son domaine de validité.

3.2. Justifier que H est définie sur $\mathbb{R}$ et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.
On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

4. On se propose de retrouver le résultat établi à la question **3.2.** par une autre méthode.

4.1. Démontrer que H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

4.2. Montrer que H est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

4.3. Retrouver l'expression de H obtenue à la question **3.2**.

EXERCICE 2

1. Questions de cours

1.1. Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.
Donner, sans démonstration, la limite quand n tend vers l'infini de l'expression :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

1.2. Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer en fonction de m la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^m$.

1.3. Soit n un entier non nul. Donner, sans démonstration, l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

* * * * * *

Soient k et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. On dispose de k urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n.

On tire une boule au hasard de chaque urne et on désigne par X_n la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus. On suppose que les tirages sont indépendants les uns des autres.

2. Donner l'ensemble J des valeurs prises par X_n.

3. Soit $j \in J$. Évaluer $\mathbb{P}(X_n \leqslant j)$ et prouver que l'on a : $\mathbb{P}(X_n = j) = \dfrac{j^k - (j-1)^k}{n^k}$.

4. Démontrer que l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n peut s'écrire :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j).$$

5. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.

6. Lorsque $k = 1$, reconnaître la loi de X_n et vérifier la cohérence du résultat obtenu à la question précédente.

EXERCICE 3

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $(\,|\,)$ dont la norme est notée $\|\ \|$.

1. Questions de cours

1.1. Soient x et y deux vecteurs de E. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|(x|y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|$. *On pourra utiliser la fonction* $t \mapsto \|x + t\,y\|^2$.

1.2. Démontrer qu'on a l'égalité $|(x|y)| = \|x\|\,\|y\|$ **si, et seulement si,** les vecteurs x et y sont colinéaires.

1.3. On considère $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique et du produit scalaire canonique $(X|Y) = X^T Y$.

Écrire cette inégalité pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

* * * * * *

Pour toute la suite de l'exercice, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Partie 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $B = \{X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\| \leqslant 1\}$.
On considère l'application F de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad F(X) = \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} x_i\, x_j$$

Par exemple, pour $n = 3$, on a $F(X) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_1 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_3x_2 = 2\,(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.

2. Exprimer alors $F(X)$ à l'aide de $S_1(n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ et de $S_2(n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

3. Montrer que F possède un maximum sur B que l'on notera M.

4. Montrer en utilisant la question **1.** que $M = n - 1$.

5. Déterminer tous les $X \in \mathbb{R}^n$ tels que $F(X) = M$.

Partie 2

On note $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique orthonormale pour le produit scalaire $(X|Y) = X^T Y$ de $\mathbb{R}^n$.

Pour tout couple de vecteurs (X, Y) de $\mathbb{R}^n$ décomposés dans la base $\mathscr{B}$: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on pose :

$$\varphi(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} \left(x_iy_j + x_jy_i\right).$$

Par exemple, pour $n = 3$, on a $\varphi(X, Y) = x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2$.

6. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ exprimer $F(X)$ à l'aide de φ.

7. Écrire la matrice $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ par $a_{ij} = \varphi\left(e_i, e_j\right)$.

8. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{U} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ constituée de vecteurs propres de la matrice A.

9. Vérifier que pour tout couple de vecteurs (X, Y) de $(\mathbb{R}^n)^2$, on a $\varphi(X, Y) = Y^T AX = X^T AY$.

10. Soit J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

10.1. Déterminer les valeurs propres de la matrice J.

10.2. En déduire une matrice diagonale Δ semblable à la matrice A.

11. Donner l'expression de $\varphi(X, Y)$ en fonction des coordonnées de X et Y dans la base $\mathcal{U}$.

12. Retrouver alors le résultat établi à la question **4.**

EXERCICE 4

Questions préliminaires

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note : $\omega = \exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}\right)$ où i est un nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que $|z| = 1$ si, et seulement si, $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

2. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Déterminer $r \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\overline{\omega^k} = \omega^r$.

3. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ et $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$.

4. On considère le polynôme $P = \sum_{k=1}^{n} k\, X^{k-1}$.

4.1. Montrer que pour tout réel x différent de 1 : $P(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.

4.2. Montrer que : $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ P(\omega^k) = \frac{n}{\omega^k - 1}$.

4.3. En factorisant $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, montrer que : $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \omega^k\right) = n$.

******

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4.
On note F et A les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définies par :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = P(F)$$

où P est le polynôme défini à la question **4**.

5. Réduction de la matrice F

5.1. Donner, sans démonstration, la matrice F^k pour $k \in [\![2, n-2]\!]$, F^{n-1} puis F^n.
On pourra étudier le cas $n = 4$ et/ou l'endomorphisme f canoniquement associé à F pour conjecturer les résultats.

5.2. On note G_F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par la famille $\left(F^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.
Montrer que G_F est de dimension n. En donner une base.

5.3. Démontrer que $X^n - 1$ est le polynôme minimal de F.

5.4. Justifier que F est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et donner une matrice diagonale D semblable à F.

6. Réduction de la matrice A

6.1. Expliciter la matrice A.

6.2. Déterminer une matrice Δ diagonale semblable à la matrice A.

6.3. Déterminer le degré du polynôme minimal de A.
En déduire que $\left(I_n, A, ..., A^{n-1}\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

7. Calculer le déterminant de A. Justifier que la matrice A est inversible.

8. Soit G_A le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par la famille $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.
Vérifier que $A^{-1} \in G_A$.

9. Montrer que $G_A = G_F$.

10. Vérifier que l'on a l'égalité : $A\ (F - I_n)^2 = n\ (F - I_n)$.

11. Déterminer enfin une expression de A^{-1} à l'aide des puissances de la matrice F.

Corrigé

Correction exercice 1.

1. On pose, lorsque cela est possible $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, comme $\lim\limits_{t\to 0}\mathrm{e}^{-t} = 1$, $t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \sim t^{x-1}$ lorsque t tend vers 0^+.

- Si $x \leqslant 0$, alors $x-1 \leqslant -1$ et la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$. Donc Γ n'est pas définie pour $x \leqslant 0$.
- Si $x > 0$, alors $x-1 > -1$ et la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,1]$. D'autre part, $t^2\,t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ par croissances comparées. Donc $t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Or, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Ainsi, la fonction $t \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, $\boxed{\Delta = \mathbb{R}_+^*}$.

1.2. Soit $x \in \Delta$. On pose $u(t) = t^x$ et $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$ définies et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, on peut réaliser une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t &= [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{+\infty} xt^{x-1}(-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$.

1.3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On montre par une récurrence simple que $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(k+\dfrac{1}{2}\right)$. Donc :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}\frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$$

Ainsi, $\boxed{\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}}$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n}\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t$.

2.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^{2n}\exp\left(-t^2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 t^{2n}\exp\left(-t^2\right) = 0$ par croissances comparées. Donc $t^{2n}\exp\left(-t^2\right) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, et la fonction $t \mapsto t^{2n}\exp\left(-t^2\right)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. L'intégrale I_n est donc bien définie.

2.2. La fonction $u : t \mapsto t^2$ étant une bijection strictement croissante et C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, on effectue le changement de variable $u = t^2$ ($\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/2\sqrt{u}$) :

$$I_n = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^n\,\mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Ainsi, $\boxed{I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}}$.

3. On pose, lorsque cela est possible, $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t$

3.1. La fonction $u \mapsto \cos u$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{\cos(u) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!}}$$

3.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On applique le théorème d'intégration terme à terme :

- les fonctions $f_n : t \mapsto (-1)^n\dfrac{(xt)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{e}^{-t^2}$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$;
- d'après la question précédente, la série $\sum f_n$ converge simplement vers $t \mapsto \cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+$;
- la série
$$\sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty}\frac{(xt)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{(2n)!}I_n$$
converge car $\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}I_n = \dfrac{x^{2n}}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi} = \dfrac{(x^2/4)^n}{n!}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, qui est le terme général d'une série exponentielle.

Ainsi, la fonction $t \mapsto \cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\boxed{H(x) = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x^2/4)^n}{n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

4. On se propose de retrouver le résultat précédent par une autre méthode.

4.1. Notons $f : (x, t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \mapsto \cos(xt)\exp(-t^2)$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|f(x, t)| \leq \exp(-t^2)$ et cette dernière fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question **2.1.**.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t\sin(xt)\exp(-t^2)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq t\exp(-t^2)$, et la fonction $t \mapsto t\exp(-t^2)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après **2.1.**.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

4.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, $H'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} t\sin(xt)\exp(-t^2)\mathrm{d}t$. On pose $u(t) = \sin(xt)$ et $v(t) = \dfrac{1}{2}\exp(-t^2)$ qui sont deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, donc on peut effectuer une intégration par parties :

$$H'(x) = \frac{1}{2}[\sin(xt)\exp(-t^2)]_0^{+\infty} - \frac{x}{2}\int_0^{+\infty} \cos(xt)\exp(-t^2)\mathrm{d}t$$

Ainsi, H est solution de $\boxed{y' = -\dfrac{x}{2}y}$.

4.3. Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{x}{2}$ est $x \mapsto -\dfrac{x^2}{4}$. La solution générale de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{x}{2}y$ est donc $y_g(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. Comme $H(0) = I_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, on retrouve que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}}$ par unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Correction exercice 2.

1. Questions de cours :

1.1. C'est une somme de Riemann : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

1.2. Soit $m \in \mathbb{N}$. On définit la fonction $f : x \mapsto x^m$ qui est continue sur $[0,1]$. On obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^m = \frac{1-0}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(0 + j\frac{1-0}{n}\right)$$

D'après la question précédente,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^m = \int_0^1 t^m\,\mathrm{d}t = \frac{1}{m+1}}$$

1.3. Si X est une variable aléatoire suivant la loi de probabilité uniforme sur $[\![1, n]\!]$ son espérance est : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

* * * * * *

Soient k et n deux entiers naturels non nuls. On dispose de k urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n.

On tire une boule au hasard de chaque urne et on désigne par X_n la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus.

2. La variable aléatoire X_n peut prendre toutes les valeurs entières entre 1 et n.
En effet, si $j \in [\![1, n]\!]$, alors X_n prend la valeur j si par exemple, on a tiré la boule numérotée j dans la première urne et les boules numérotées 1 dans les autres. Donc $\boxed{J = [\![1, n]\!]}$.

3. Soit $j \in J$. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au numéro tiré dans l'urne i. On a donc $\mathbb{P}(Y_i \leqslant j) = \dfrac{j}{n}$.
Comme les tirages dans les différentes urnes sont indépendants, les variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_k$ sont indépendantes. De plus, $(X_n \leqslant j) = (Y_1 \leqslant j) \cap \dots \cap (Y_k \leqslant j)$. Ainsi, $\boxed{\mathbb{P}(X_n \leqslant j) = \left(\dfrac{j}{n}\right)^k}$.

Si $j = 1$, alors $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n \leqslant 1) = \dfrac{1^k}{n^k}$.
Si $j > 1$, alors $\mathbb{P}(X_n = j) = \mathbb{P}(X_n \leqslant j) - \mathbb{P}(X_n \leqslant j-1) = \dfrac{j^k - (j-1)^k}{n^k}$.

4. Remarquons que pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}(X_n > j) = \displaystyle\sum_{k=j+1}^{n} \mathbb{P}(X_n = k)$, donc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) \\
&= \sum_{0 \leq j < k \leq n} \mathbb{P}(X_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}(X_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X_n = k)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j)}$.

5. On utilise les deux questions précédentes, en remarquant que $\mathbb{P}(X_n \leqslant 0) = 0 = \left(\frac{0}{n}\right)^k$:

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \mathbb{P}(X_n \leqslant j)) \\ &= n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^k \end{aligned}$$

D'après les questions de cours : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^k = \frac{1}{k+1}$. et donc $\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^k \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{k+1} + o(n)$. Par suite :

$$E(X_n) \underset{n\to+\infty}{=} n - \frac{n}{k+1} + o(n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{nk}{k+1} + o(n)$$

Et finalement : $\boxed{E(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nk}{k+1}}$

6. Lorsque $k = 1$, la variable X_n est égale au numéro obtenu en tirant une boule dans une urne. Elle suit donc la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

D'après la question de cours, $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \frac{n+1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}}$, ce qui correspond au résultat trouvé à la question précédente pour $k = 1$.

Correction exercice 3.

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $(\,|\,)$ dont la norme est notée $\|\,\|$.

1. **Questions de cours**

1.1. Si y est le vecteur nul, alors l'inégalité est vérifiée.
Sinon, on pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \|x + t\,y\|^2$. On développe :

$$\begin{aligned} P(t) &= (x + t\,y | x + t\,y) \\ &= \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 + 2t(x|y). \end{aligned}$$

P est donc une fonction polynomiale de degré 2 qui est toujours positive : son discriminant Δ est négatif ou nul. Or $\Delta = 4(x|y)^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2$. D'où

$$4(x|y)^2 \leqslant 4\|x\|^2\|y\|^2,$$

ce qui donne

$$\boxed{|(x|y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|}$$

1.2. Il y a égalité dans l'inégalité précédente ssi y est le vecteur nul ou le discriminant de P s'annule, c'est à dire si P admet une racine réelle. Ainsi :

$$\boxed{|(x|y)| = \|x\|\,\|y\| \iff (y = 0 \text{ ou } \exists t \in \mathbb{R}, x + t\,y = 0) \iff x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.}}$$

1.3. En remplaçant, on obtient :

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} y_k\right| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}}$$

$$\boxed{\text{Pour toute la suite de l'exercice, on identifie } \mathbb{R}^n \text{ et } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

Partie 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $B = \{X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\| \leqslant 1\}$.
On considère l'application F de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad F(X) = \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} x_i\, x_j$$

Par exemple, pour $n = 3$, on a $F(X) = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_1+x_2x_3+x_3x_1+x_3x_2 = 2\,(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.

2. On développe le carré :

$$[S_1(n)]^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i\, x_j = S_2(n) + F(x)$$

Donc

$$\boxed{F(x) = [S_1(n)]^2 - S_2(n)}$$

3. La fonction F est continue sur B qui est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$, donc un compact de $\mathbb{R}^n$.
Il en résulte d'après le cours que F possède un maximum M sur B.

4. D'après la question de cours, pour tout $X \in B$:

$$F(X) = [S_1(n)]^2 - S_2(n) \leqslant \left(\sqrt{n}\,\sqrt{S_2(n)}\right)^2 - S_2(n) = (n-1)\,S_2(n) \leqslant n-1$$

car $S_2(n) = \|X\|^2 \leq 1$.
Ainsi, $M \leqslant n-1$.
Or en prenant le vecteur $X = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, on vérifie que $X \in B$ et que $F(X) = n-1$.

Conclusion : $\boxed{M = n-1}$

5. D'après la question précédente et la question de cours, $F(X) = M$ ssi $S_2(n) = 1$ et X est colinéaire à $(1, 1, \ldots, 1)$.

On a donc $\boxed{X = \pm\dfrac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \ldots, 1)}$

Partie 2.

On note $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique orthonormale pour le produit scalaire $(X|Y) = X^T Y$ de $\mathbb{R}^n$.

Pour tout couple de vecteurs (X, Y) de $\mathbb{R}^n$ décomposés dans la base $\mathscr{B}$: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on pose :

$$\varphi(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} \left(x_iy_j + x_jy_i\right).$$

Par exemple, pour $n = 3$, on a $\varphi(X, Y) = x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2$.

6. On a pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\varphi(X, X) &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} x_ix_j + \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} x_jx_i\\ &= \frac{1}{2}F(X) + \frac{1}{2}F(X)\end{aligned}$$

Et finalement : $\boxed{F(X) = \varphi(X, X)}$

7. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(e_i, e_i) = 0$ et pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 1$. Ainsi :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}}$$

8. La matrice A est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable d'après le théorème spectral.
Par suite, il existe une base orthonormale $\mathcal{U} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ constituée de vecteurs propres de la matrice A.

9. Soit $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$:

$$\begin{aligned}Y^TAX &= \sum_{i=1}^{n} y_i(AX)_i\\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}} x_k\\ &= \sum_{\substack{1\leqslant i,k\leqslant n\\ i\neq k}} y_ix_k.\end{aligned}$$

De même,

$$X^TAY = \sum_{\substack{1\leqslant i,k\leqslant n\\ i\neq k}} x_iy_k$$

Noter que comme $Y^TAX \in \mathbb{R}$, on a immédiatement : $Y^TAX = (Y^TAX)^T = X^TAY$ puisque A est une matrice symétrique.

Enfin,

$$\begin{aligned}
\varphi(X,Y) &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}}\left(x_iy_j+x_jy_i\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} x_iy_j+\frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} x_jy_i\\
&= \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} x_iy_j
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\varphi\,(X,Y) = Y^TAX = X^TAY}$$

10. Soit J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

10.1. La matrice J est de rang 1 car toutes ses colonnes sont colinéaires entre elles. Donc 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$. Puis, le vecteur $(1,1,\ldots,1)\in\mathbb{R}^n$ est propre associé à la valeur propre n. Donc $\boxed{\mathbf{Sp}(J)=\{0,n\}}$

10.2. La matrice J est diagonalisable et d'après la question précédente :

il existe $P\in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $J=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$.

D'où $A=J-I_n=P(D-I_n)P^{-1}$: A est semblable à

$$\boxed{\begin{pmatrix} n-1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & -1\end{pmatrix}}$$

11. On suppose que u_1 est vecteur propre associé à $n-1$ et les autres sont associés à -1. Soit $X=\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_iu_i$ et $Y=\displaystyle\sum_{i=1}^n \mu_iu_i$.

$$\begin{aligned}
\varphi(X,Y) &= (Y|AX)\\
&= \left(\sum_{i=1}^n \mu_iu_i|(n-1)\lambda_1u_1-\sum_{i=2}^n \lambda_iu_i\right)\\
&= (n-1)\mu_1\lambda_1-\sum_{i=2}^n \mu_i\lambda_i
\end{aligned}$$

12. Pour tout $X \in B$, $F(X) = \varphi(X, X) = (n-1)\lambda_1^2 - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^2 \leqslant (n-1)\lambda_1^2$.

Or $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ car $\mathcal{U}$ est orthonormale et donc $\lambda_1^2 \leq \|X\|^2 \leq 1$.

On retrouve ainsi : $F(X) \leq n-1$.

De plus, pour $X = u_1$, on a $F(u_1) = n-1$ et donc $\boxed{M = n-1}$

Correction exercice 4.

Questions préliminaires

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note : $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$, où i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a $|z|^2 = z\bar{z}$, donc $|z| = 1 \iff z\bar{z} = 1 \iff \bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

2. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Comme $\overline{\omega^k} = e^{-\frac{2ik\pi}{n}} = e^{2i\pi - \frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i(n-k)\pi}{n}}$, on trouve $\boxed{\text{si } k \in [\![1, n-1]\!],\ r = n-k}$ et $\boxed{\text{si } k = 0,\ r = 0}$

3. Comme $n \geqslant 2$, $\omega \neq 1$, donc on applique la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0}$$

car $\omega^n = 1$.
Puis,

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \exp\left(\frac{\cancel{2}i\pi}{\cancel{n}} \frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{2}}\right)$$

donc $\boxed{P_n = (-1)^{n-1}}$

4. On considère le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k X^{k-1}$.

4.1. Le polynôme P est le polynôme dérivé de $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$Q(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

En dérivant, on trouve pour tout $x \neq 1$:

$$\boxed{P(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}}$$

4.2. D'après la question précédente, pour tout x réel différent de 1,

$$(x-1)P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1.$$

On a deux polynômes qui sont égaux en une infinité de réels, ils sont donc égaux.
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors

$$(\omega^k - 1)P(\omega^k) = n(\omega^k)^{n+1} - (n+1)(\omega^k)^n + 1.$$

Comme $\omega^k \neq 1$:

$$P(\omega^k) = \frac{n\omega^{k(n+1)} - (n+1)\omega^{kn} + 1}{(\omega^k - 1)^2} = \frac{n\omega^k - (n+1) + 1}{(\omega^k - 1)^2} = \frac{n\cancel{(\omega^k - 1)}}{(\omega^k - 1)^{\cancel{2}}}$$

Ainsi, $\boxed{\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ P(\omega^k) = \dfrac{n}{\omega^k - 1}}$

4.3. Les racines de $X^n - 1$ sont les ω^k, avec $k \in [\![1, n-1]\!]$. Donc $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k)$. Or, d'après l'égalité de Bernoulli, $X^n - 1 = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k$. Ainsi, $\prod_{k=1}^{n-1}(X - \omega^k) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. En substituant $X = 1$, on trouve : $\boxed{\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \omega^k\right) = n}$

5. Réduction de la matrice F.

5.1. On a facilement :

$$F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & & & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{ pour } k \in [\![2, n-1]\!] : F^{\,k} = \begin{pmatrix} 0_{n-k,n-k} & I_{n-k} \\ I_k & 0_{k,n-k} \end{pmatrix}$$

et enfin : $F^{\,n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F^n = I_n$.

5.2. D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $l \in [\![0, n-1]\!]$, $F^{nk+l} = F^l$.
On en déduit que $G_F = \text{Vect}\left(I_n, F, F^2, ..., F^{\,n-1}\right)$, et donc que la famille $H = \left(I_n, F, F^2, ..., F^{\,n-1}\right)$ engendre le sous-espace G_F.

Soient $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ une famille de scalaires tels que : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i F^{\,i} = O_n$. On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix} = O_n$$

et donc, $a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = 0$. La famille H est donc libre.

On conclut : $\boxed{H \text{ est une base de } G_F}$ et $\boxed{\dim(G_F) = n}$.

5.3. D'après la question précédente, la famille $\left(I_n, F, F^2, \ldots F^{n-1}\right)$ est libre, donc le polynôme minimal de F est de degré au moins n. De plus, $X^n - 1$ est annulateur pour F. C'est donc le polynôme minimal de F.

5.4. Comme $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de F et qu'il est scindé à racines simples, F est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Comme $X^n - 1$ est le polynôme minimal de F, les valeurs propres de F sont exactement les racines de $X^n - 1$: ce sont les ω^k avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ainsi, $\boxed{F \text{ est semblable à } D = \operatorname{diag}(1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1})}$.

6. Réduction de la matrice A.

6.1. On trouve :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \ddots & n-2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}}$$

6.2. D'après la question **5.5.4.**, il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que : $F = QDQ^{-1}$. Ainsi,

$$A = P(F) = \sum_{k=1}^{n} k\left(QDQ^{-1}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kQD^{k-1}Q^{-1} = Q\left(\sum_{k=1}^{n} kD^{k-1}\right)Q^{-1}$$

Donc A est semblable à la matrice $\boxed{P(D) = \operatorname{diag}\left(\dfrac{n(n+1)}{2}, \dfrac{n}{\omega - 1}, \dfrac{n}{\omega^2 - 1}, \ldots, \dfrac{n}{\omega^{n-1} - 1}\right)}$

6.3. Comme les valeurs propres de A sont toutes distinctes, $\boxed{\text{le polynôme minimal de } A \text{ est de degré } n}$

Prenons $\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}$ des scalaires tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k A^k = 0_n$. Alors, le polynôme $Q = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$ est un polynôme annulateur de A de degré strictement inférieur à n. Par minimalité du polynôme minimal, Q est donc le polynôme nul : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda_k = 0$.

Ainsi $\boxed{\left(I_n, A, ..., A^{n-1}\right) \text{ est une famille libre}}$

7. D'après la question **6.6.2.**, $\det(A) = \dfrac{n(n+1)}{2} \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{n}{\omega^k - 1} = \frac{n^n(n+1)}{2\prod_{k=1}^{n-1}(\omega^k - 1)}$.

Puis, d'après la question **4.4.2.**, $\boxed{\det(A) = (-1)^{n-1}\dfrac{n^{n-1}(n+1)}{2} \neq 0}$ et A est inversible.

8. Le polynôme minimal de A, $P_A \in \mathbb{C}[X]$, n'admet pas 0 comme racine.

Il s'écrit donc $P_A = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$, avec $\lambda_0 \neq 0$. Comme $P_A(A) = 0$, on a :

$$\lambda_0 I_n = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k A^k = A\left(-\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} A^k\right).$$

Donc $A^{-1} = -\dfrac{1}{\lambda_0} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} A^k$. On a bien $\boxed{A^{-1} \in G_A}$

9. Soit $M \in G_A$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ tels que $M = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k A^k$. Autrement dit, en posant $Q = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k X^k$, $M = Q(A)$. Or, $A = P(F)$, donc $M = Q(P(F)) = Q \circ P(F)$. Ainsi, $M \in G_F$.

Donc $\boxed{G_A \subset G_F}$

D'autre part, comme la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est libre, $\dim(G_A) \geqslant n$.

Comme $\dim(G_F) = n$, on a donc $\boxed{G_F = G_A}$

10. D'après la question **4.4.1.**, $P \times (X-1)^2 = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$. En substituant X par F, on trouve :

$$A(F - I_n)^2 = nF - (n+1)I_n + I_n$$

On a donc bien $\boxed{A\ (F - I_n)^2 = n\ (F - I_n)}$

11. D'après les questions **8.** et **9.**, il existe des scalaires $\left(y_j\right)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$ tels que : $A^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} y_k\ F^k$.

La question précédente donne : $n\,A^{-1}\ (F - I_n) = F^2 - 2\,F + I_n$. Puis :

$$\begin{aligned}
F^2 - 2\,F + I_n &= n\,(F - I_n)\sum_{k=0}^{n-1} y_k\ F^k \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} y_k F^{k+1} - n\sum_{k=0}^{n-1} y_k F^k \\
&= n\sum_{k=1}^{n-1}(y_{k-1} - y_k)F^k + (ny_{n-1} - ny_0)I_n
\end{aligned}$$

Comme la famille $\left(I_n, F, \dots, F^{n-1}\right)$ est libre, on identifie :

$$y_2 = y_3 = \dots = y_{n-1},\quad y_{n-1} - y_0 = \frac{1}{n},\quad y_0 - y_1 = -\frac{2}{n}\quad \text{et}\quad y_1 - y_2 = \frac{1}{n}$$

Cela ne suffit pas pour conclure.

On va donc chercher une autre égalité en utilisant le vecteur $U = \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$. En effet, $F^k U = U$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $A\,U = \dfrac{n\,(n+1)}{2}\,U$, on trouve $\dfrac{2}{n\,(n+1)}\,U = A^{-1}\,U = (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})\ U$.

On obtient l'égalité manquante : $y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} = \dfrac{2}{n\ (n+1)}$.
Finalement, on obtient :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{2}{n^2\,(n+1)}\ \left(F^2 + \dots + F^{n-1}\right) + \frac{2 - (n+1)\,n}{n^2\,(n+1)}\ I_n + \frac{2 + n\,(n+1)}{n^2\,(n+1)}\ F}$$

On pouvait aussi raisonner avec les polynômes : en effet, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $A^{-1} = Q(F)$ (questions **8.** et **9.**). Donc $P(F)Q(F) = I_n$. Ainsi, le polynôme $PQ - 1$ annule la matrice F.
Comme le polynôme minimal de F est $X^n - 1$ (question **5.5.3.**), celui-ci divise $PQ - 1$. On évalue $PQ - 1$ aux racines de $X^n - 1$. On a donc : $\dfrac{n(n+1)}{2}Q(1) - 1 = 0$ et pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\dfrac{n}{\omega^k - 1}Q(\omega^k) - 1 = 0$ (question **4.4.2.**).
On remarque que $Q - \dfrac{1}{n}(X - 1)$ admet les ω^k comme racines avec $k \in [\![1, n-1]\!]$. Or ce polynôme est de degré au plus $n - 1$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q - \dfrac{1}{n}(X - 1) = \lambda(1 + X + \cdots + X^{n-1})$.
En évaluant en 1, on trouve $\lambda = \dfrac{2}{n^2(n+1)}$.
D'où $A^{-1} = \dfrac{2}{n^2(n+1)}(I_n + F + F^2 + \cdots + F^{n-1}) + \dfrac{1}{n}(F - I_n)$.

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

Malheureusement, et même si nous avons constaté globalement un progrès dans les copies, il me faut reprendre les remarques générales faites l'an dernier sur les copies :
- Les correcteurs ont signalé à plusieurs reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**.
Notons que nous avons rencontré cette année des copies quasiment illisibles et donc lourdement pénalisées.
Rappelons que l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.
- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », etc... : rappelons que toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.
- Il ne suffit pas d'écrire « je peux utiliser le théorème car ses hypothèses sont vérifiées »... , il faut les vérifier !
- Enfin, un exemple ne permet pas de démontrer un résultat général.

Les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire MP.
Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrisent pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de MP et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.
Nous constatons aussi une grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés.
Enfin, notons une nouvelle fois que les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé.

Conclusion : Nous demandons dans la rédaction des exercices constituant du sujet de la rigueur et une justification des résultats proposés en utilisant le cours : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.
Nous rappelons qu'il vaut mieux admettre le résultat d'une question clairement et continuer à traiter le reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.

Nous proposons chaque année dans ce rapport une correction détaillée du sujet et invitons vivement

les candidats à l'étudier attentivement.

• Commentaires exercice par exercice

Dans cette partie du rapport, nous avons voulu insister sur les points les plus négatifs rencontrés lors de la correction des copies, ceci afin d'aider les étudiants à ne pas faire ce genre d'erreurs, parfois grossières et souvent faciles à éviter.

Exercice 1

1. Il s'agit d'une question très classique, que tout étudiant de deuxième année de MP a dû rencontrer au moins une fois dans l'année
1.1. La continuité et la positivité sont trop souvent oubliées.
Et malheureusement trop de résultats faux.
1.2. Même si la justification du caractère C^1 va disparaître des programmes, il reste judicieux de s'assurer que ce que l'on écrit a un sens.
1.3. Dans beaucoup de copies, on trouve $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n+\frac{1}{2}\right)!$: l'énoncé demandait pourtant d'exprimer le résultat à l'aide de factorielle**s**.
2.
2.1. Comme à la question **1.1.**, la continuité et la positivité sont trop souvent oubliées.
Rappelons que le fait que la limite de la fonction soit nulle n'implique pas la convergence de l'intégrale.
2.2. Lorsque le changement de variable est fait, il y a rarement de justification rigoureuse.
3.
3.1. Il est étonnant de constater que certains étudiants sont incapables d'écrire le développement en série entière autour de 0 de la fonction cosinus ou(et) de donner un domaine de convergence juste.
3.2. Trop peu de candidats vont jusqu'au bout de la question.
4.
4.1. Question globalement bien traitée.
Attention à ne pas dériver $H(x)=\int_0^{+\infty}\cos(tx)\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$ par rapport à la variable d'intégration t.
4.2. Attention aux justifications lorsque l'on effectue une intégration par parties, au moins au niveau des limites.
4.3. Correctement traitée par ceux qui ont abordé cette question.
Plusieurs candidats ne relèvent pas l'incohérence du résultat obtenu à cette question avec celui qu'ils ont obtenu à la question **3.2.**. C'est surprenant.

Exercice 2

Globalement, il semble que les sommes géométriques ne soient pas toujours totalement maîtrisées.
On voit apparaître des unions de probabilités ce qui laisse penser que de nombreux candidats mélangent évènements et probabilité de ces évènements.
1.
1.1. Correctement traitée.
1.2. Le calcul de $\int_0^1 x^m\,\mathrm{d}x$ laisse parfois songeur...

Trop de candidats traitent le cas $m = -1$ alors que l'énoncé précisait $m \in \mathbb{N}$.
1.3. Correctement traitée.
2. Correctement traitée.
3. La justification « évènements indépendants » est trop souvent omise.
4. Les candidats n'ont pas toujours compris l'ordre des questions, en particulier que cette question était générale et permettait de traiter la suivante.
5. Pour beaucoup de candidats, sommer des équivalents ne pose aucun problème.
6. La moitié des copies qui ont abordé cette question ne connaissent pas l'espérance de la loi uniforme.
Rappelons que « vérifier la cohérence d'un résultat » demande quelques explications : une réponse telle que « le résultat est cohérent » ne peut suffire.

Exercice 3

1.
1.1. Beaucoup de manque de rigueur dans cette question de cours : disjonction de cas mal faite, positivité non explicitement exprimée, ...
1.2. Un raisonnement par double implication aurait permis de faire le cas facile...
1.3. Étonnamment beaucoup d'erreurs même dans les bonnes copies avec des résultats non homogènes.
2. Souvent traitée, on ne sait parfois trop comment.
3. Rappelons que ça n'est pas parce qu'une fonction est majorée qu'elle possède un maximum. (trop souvent rencontré, même dans les bonnes copies)
4. Souvent confusion entre maximum et majorant.
5. Question peu traitée.
6. Souvent traitée, on ne sait parfois trop comment.
7. Rarement traitée correctement. On voit même des vecteurs comme coefficients de la matrice...
8. Le Théorème spectral est en général bien connu.
9. Certains candidats obtiennent le résultat, même avec une matrice A fausse !
10. C'est une question classique et certains se contentent de donner le résultat sans justification ou du style $J^2 = J \Longrightarrow \mathrm{Sp}(J) = \{0, n\}$.
Certains candidats réussissent la question **10.1.**, trouvent les dimensions des espaces propres mais n'arrivent pas à l'exploiter dans la question **10.2.**
11. et **12.** Questions très peu traitées.

Exercice 4

Malgré des questions très faciles au début de l'exercice afin de rappeler aux candidats quelques résultats simples sur les nombres complexes, ceux-ci semblent peu à l'aise avec l'ensemble $\mathbb{C}$ et les racines n-ièmes de l'unité.
1. Cette question de cours très facile a visiblement perturbé beaucoup de candidats qui ont oublié que $|z|^2 = z\,\overline{z}$ et se lancent dans des calculs compliqués en posant $z = x + \mathrm{i}\,y$.
2. Calculs laborieux.
3. C'est quasiment du cours. Dans beaucoup de copies, les résultats obtenus ne sont pas simplifiés.

On constate une méconnaissance des hypothèses d'utilisation de la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique : $|\omega| \leqslant 1$ ou $|\omega| < 1$,...

4.

4.1. et **4.2.** Globalement bien traitées.

4.3. La simplification par $X - 1$ ne pose aucun problème à la plupart des candidats.

5.

5.1. L'indication de l'énoncé n'est pas suivie et au lieu de bien comprendre le cas $n = 4$, les candidats écrivent beaucoup de sottises.

5.2. La liberté est souvent affirmée sans démonstration ou des arguments du type : la famille $(I_n, F, ..., F^{n-1})$ est libre car échelonnée. De plus, la périodicité est souvent non utilisée de façon explicite.

5.3. Seul le caractère annulateur est souvent vu.

5.4. Question bien traitée.

Les questions suivantes ne sont en général pas traitées.

FIN